

Resumen Campo Gravitatorio

Leyes de Kepler

1. Los planetas describen elipses en torno al Sol estando éste en uno de los focos
2. Los planetas se mueven en la elipse de forma que su velocidad areolar es constante (equivalente a decir que conserva el momento cinético)
3. Para todos los objetos en órbita en torno a un mismo cuerpo se cumple que:

$$\frac{T^2}{a^3} = Kp$$

Ley de Gravitación Universal

La descubre Newton a partir de las leyes del Kepler y sus tres leyes del movimiento.

$$\vec{F} = -G \frac{m \cdot M}{r^2} \cdot \vec{u}_r$$

Campo gravitatorio

$$\vec{F} = -G \frac{m \cdot M}{r^2} \cdot \vec{u}_r = m \cdot \left(-G \frac{M}{r^2} \cdot \vec{u}_r \right) = m \cdot \vec{g}$$

El campo creado por una masa puntual o esférica se define como

$$\vec{g} = \left(-G \frac{M}{r^2} \cdot \vec{u}_r \right)$$

Principio de superposición

Del principio de superposición de fuerzas se deduce el principio de superposición de campo, que nos permitirá calcularlo cuando la masa que lo crea no sea puntual o esférica:

$$\vec{g} = \sum \vec{g}_i = \int d\vec{g}$$

Energía

Se trata de una fuerza conservativa, ya que:

$$W_G(A \rightarrow B) = \int_A^B \vec{F}_G \cdot d\vec{r} = \dots = -\Delta \left(-G \frac{mM}{r} \right) \Rightarrow \text{es conservativa}$$

Se define la variación de energía potencial como el trabajo para vencer a la fuerza de la gravedad, es decir:

$$W_{-G}(A \rightarrow B) = \int_A^B -\vec{F}_G \cdot d\vec{r} = \dots = \Delta \left(-G \frac{mM}{r} \right) = \Delta E_p$$

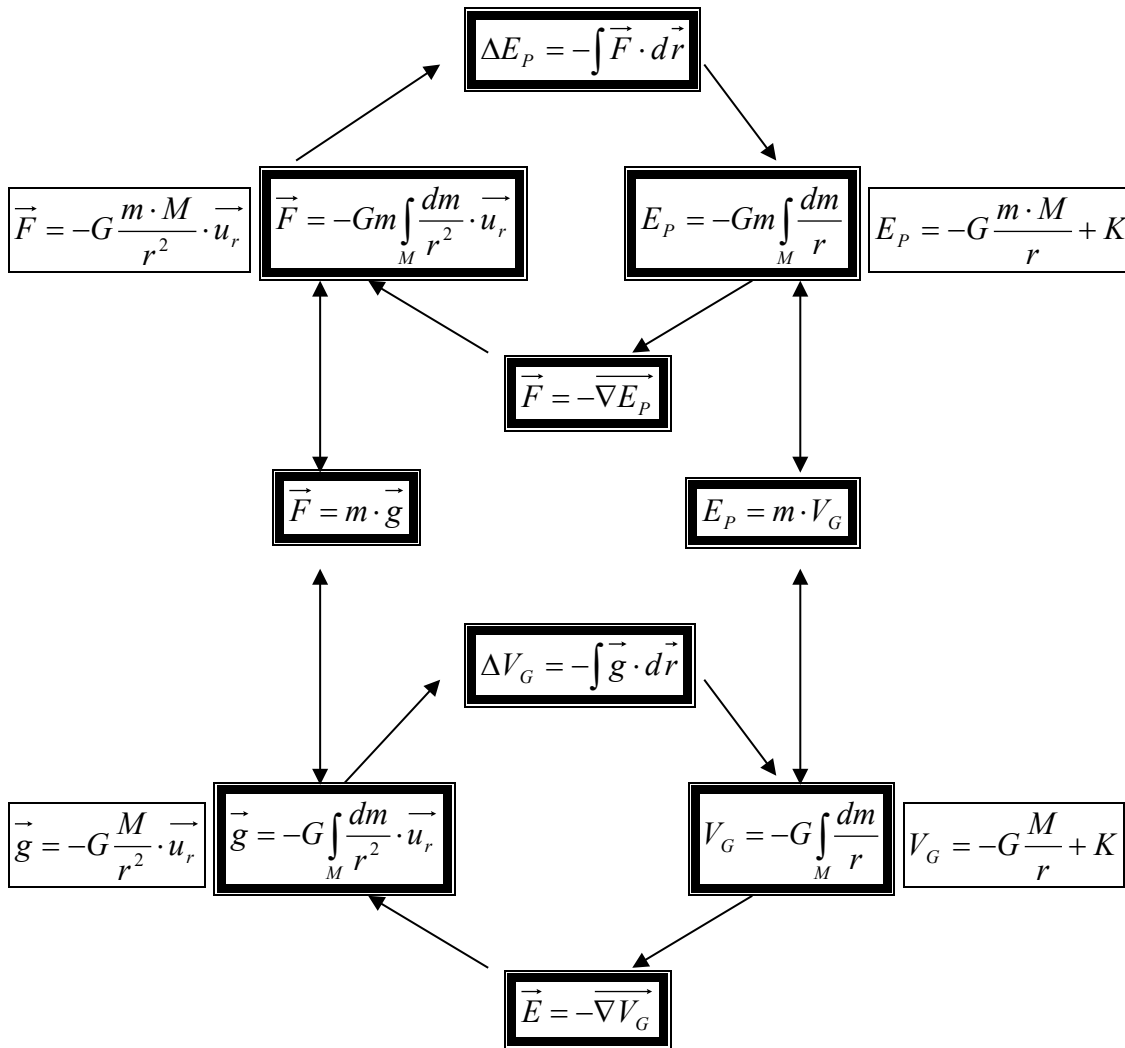
Por tanto la energía potencial gravitatoria se define como:

$$E_p = -G \frac{mM}{r} + cte$$

Fijar la cte en uno u otro valor me permite definir el origen de energía potencial.

Análogamente se define el potencial gravitatorio a partir del campo.

Cuadro resumen de la relación entre las principales magnitudes del campo gravitatorio



Las fórmulas con marco grueso son de validez general, y las de marco fino sólo son válidas para masas puntuales o esféricas.

Teorema de Gauss

Es útil para calcular el campo cuando este tiene una simetría bien esférica, cilíndrica o plana, pero es de validez general.

$$\int_{SC} \vec{g} \cdot d\vec{S} = -4\pi G \cdot M(SC)$$

Donde $M(SC)$ es la masa que está dentro de la superficie cerrada (SC) elegida.

Satélites

La energía cinética es positiva y la potencial gravitatoria negativa, de tal forma que la mecánica que es la suma de ambas puede ser positiva, negativa o cero.

Si $E > 0$ el objeto escapará del campo gravitatorio

Si $E < 0$ el objeto está atrapado en el campo gravitatorio

Si $E = 0$ el objeto está en el caso límite.

En un satélite siempre se cumple que:

$$\begin{array}{l} E = cte \\ \vec{L} = cte \end{array}$$

Satélites en órbita circular

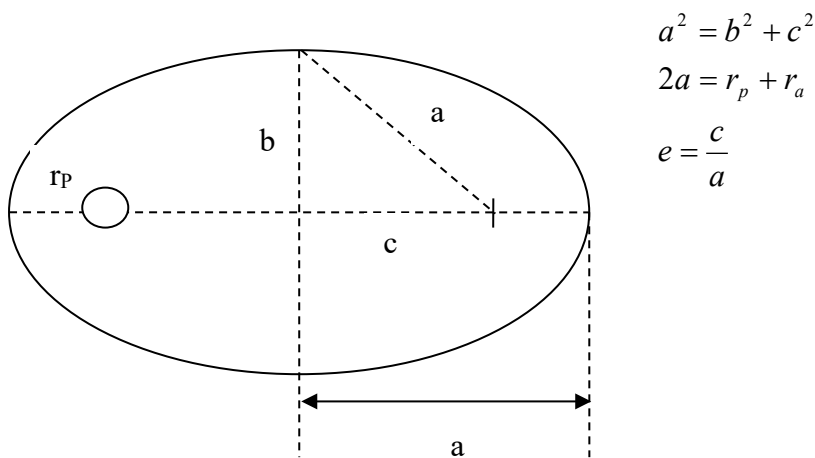
Estos problemas se resuelven aplicando que la fuerza de la gravedad es la fuerza centrípeta.

Es fácil ver que en estos satélites siempre se cumple que:

$$E = \frac{1}{2} E_p = -E_c \text{ expresión que resulta de gran utilidad en los problemas.}$$

La velocidad de escape es aquella que hace que la energía mecánica sea cero.

Órbitas elípticas



En una órbita elíptica se cumple siempre que **se conservan la energía mecánica y el momento angular**.
Por tanto las dos ecuaciones más importantes para resolver la órbita elíptica son:

Conservación de la energía: $E = \frac{1}{2} m v^2 - G \frac{mM}{r} = cte$

Conservación de mto angular $r \cdot v \cdot \widehat{sen \hat{r} \hat{v}} = cte = r_a v_a = r_p v_p$

El periodo orbital se calcula con la tercera de Kepler $\frac{T^2}{a^3} = cte = \frac{4\pi^2}{GM}$

Otras ecuaciones útiles son $T = \frac{2\pi ab}{r_p \cdot v_p}$ $E = \frac{GMm}{2r_p} (e - 1) = -\frac{GMm}{2a} = \frac{1}{2} \overline{E_p}$